安定部分多様体の幾何学 (部分多様体の微分幾何学)

AUTHOR(S):

江尻, 典雄

数理解析研究所講究録
408巻 1980年 31-45

安定部分多様体の幾何学

都立大学理学研究科　江尻典雄

1. Introduction

平均曲率を一定とする部分多様体は、部分多様体の中で1つの興味ある対象である。特に球面から球面への平均曲率を一定とする等長挿入の分類については B. Symthの結果[10]を使えば、次のことがわかる………… 平行な平均曲率vectorをもつ球面から球面への等長挿入は、小円への極小挿入となる………… 。しかるに興味深い例が得られたわけではない。そこで平行な平均曲率vectorという条件をゆるめよう。

Mをn次元compact Riemannian manifoldとして　半径1をもつ$(n+p)$次元球面へ等長挿入されているものとする。xをその等長挿入とし，$\mathcal{H}$はxの平均曲率vectorとする。xが極小挿入とは$\mathcal{H}=0$のことであり，平行な平均曲率vectorをもつとは，$\nabla^{\perp}\mathcal{H}=0$ そして一定な平均曲率をもつとは $\|\mathcal{H}\|=$定数 となることである。R^{n+p+1}を$(n+p+1)$次元

Euclid 空間として $(x_1, \cdots, x_{n+p+1})$ をその標準座標系とする。$S^{n+p} \equiv \{x \in R^{n+p+1}; (x_1)^2 + \cdots + (x_{n+p+1})^2 = 1\}$ とする。x が極小挿入ならば 各 x_i は M の Laplacian Δ について $\Delta x_i = -n x_i$ を満たしている。x が pseudo-umbilical で平行な平均曲率 vector をもてば 各 x_i は 定数と Δ の1つの0と異なる固有値の固有空間の固有関数達によって生成される。しかし $\|\mathcal{L}\|$ = 定数と上のような 各 x_i との間の関係はよく知られていない。しかるに各 x_i が 0 でない異る2つの Δ の固有値の固有空間の固有関数達によって生成されるための十分条件は 次で与えられる。

$$(\ast)\begin{cases} M: \text{pseudo-umbilical で一定な平均曲率をもつ} \\ \Delta^{\perp}\mathcal{L} = -\lambda\mathcal{L} \quad (\mathcal{L} \neq 0) \end{cases}$$

特に M が pseudo-umbilical で一定な平均曲率をもつとき $\Delta^{\perp}\mathcal{L} = -n\mathcal{L}$ という条件は、M から S^{n+p} への挿入 f に与える量 $\int_M \|\mathcal{L}_f\|^n \ast 1_f$ の Euler-Lagrange 方程式となる。n が偶数ならば、このことは、B.Y. Chen[1] 等 の定義した安定部分多様体となる。

そこで $(\ast\ast)$ 条件を次のようにする。

$$(\ast\ast)\begin{cases} M: \text{pseudo-umbilical で一定な平均曲率をもつ} \\ \Delta^{\perp}\mathcal{L} = -n\mathcal{L} \end{cases}$$

球面から球面への全測地曲面としてのうめ入みは、球面への極小挿入の中で孤立していることが積分不等式を使って J. Simons[8] によって示された。更にある意味において

その近くのものも決定できている[2],[5],[7]。ここでは球面のpseudo-umbilical submanifoldについての積分不等式を導き，全測地曲面としてのうめ入みが(☆☆)を満たす挿入の中で孤立していることを示す。

定理A　MをS^{n+p}のn次元compact orientable submanifoldで(☆☆)を満たすとする。MのRicci curvatureが正定数kで下からおさえられていれば

$$\|\sigma\|^2 \leqq n^2\left(\sqrt{(n-1)/k}-\sqrt{k/(n-1)}\right)^2$$

が成り立つ。

定理B　上と同じとして，挿入はfullとする。もし

$$\|\sigma\|^2 \leqq \left\{A+\sqrt{A^2+B}\right\}/2$$

ならば，Mは 全測地曲面，Veronese manifold及び$S^n(\sqrt{n/2(n+1)})$のどれかとなる。ここで$A=n(2(n+1)C-3n+S/(n-1))$
$B=4n^2(n-S/(n-1))(2(n+1)C-n)$，CはMの断面曲率の最小値でSはMのscalar curvatureである。

さてMの断面曲率が十分1に近いとして，定理Aは平均曲率が十分0に近いことをいっている。一方定理Bの仮定の右辺は$2n$に近くなるので定理Bの仮定は自動的に満たされる。ゆえに全測地曲面としてのうめ入みの孤立性が示された。

2。準備

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$をn次元Riemannian manifoldとして$(n+p)$次元単位球面$(S^{n+p}, \langle\ ,\ \rangle')$に等長挿入されているとする。$\nabla, \nabla'$をそれぞれ$M$と$S^{n+p}$の計量$\langle\ ,\ \rangle, \langle\ ,\ \rangle'$に関する共変微分とする。その等長挿入の第2基本形式σは

$$\sigma(X, Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y \tag{2.1}$$

で与えられる。σのtraceを$\mathcal{H}$として，$\mathcal{H}$は平均曲率vectorと呼ばれる。$e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$を$S^{n+p}$の a local field of orthonormal framesとして，$e_1, \cdots, e_n$のMへの制限はMの接vector fieldとなっているものとする。$\omega^1, \cdots, \omega^n, \omega^{n+1}, \cdots, \omega^{n+p}$は$e_1, \cdots, e_{n+p}$のdual framesのfieldとする。今我々は、次のような添字記号を用いる。$A, B, C = 1, \cdots, n+p$; $i, j, k = 1, \cdots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = n+1, \cdots, n+p$.

S^{n+p}の構造方程式は

$$d\omega^A = -\sum \omega^A{}_B \wedge \omega^B, \quad \omega^A{}_B + \omega^B{}_A = 0 \tag{2.2}$$

$$d\omega^A{}_B = -\sum \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B + \omega^A \wedge \omega^B. \tag{2.3}$$

となる。これらをMに制限してその等長挿入の構造方程式が得られる。

$$\omega^\alpha = 0, \tag{2.4}$$

$$\omega^\alpha{}_i = \sum h^\alpha_{ij} \omega^j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}, \tag{2.5}$$

$$d\omega^i = -\sum \omega^i{}_j \wedge \omega^j, \quad \omega^i{}_j + \omega^j{}_i = 0, \tag{2.6}$$

$$d\omega^i{}_j = -\sum \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j + \Omega^i{}_j, \quad \Omega^i{}_j = \frac{1}{2}\sum R^i{}_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l, \tag{2.7}$$

$$d\omega^\alpha{}_\beta = -\sum \omega^\alpha{}_\gamma \wedge \omega^\gamma{}_\beta + \Omega^\alpha{}_\beta, \quad \Omega^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2}\sum R^\alpha{}_{\beta kl}\, \omega^k \wedge \omega^l. \tag{2.8}$$

σ と h^α_{ij} は

(2.9) $\quad \sigma(e_i, e_j) = \sum h^\alpha_{ij} e_\alpha$

という関係を満たしている。Gauss, Ricci の方程式は

(2.10) $\quad R^i_{jkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum (h^\alpha_{ik} h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il} h^\alpha_{jk})$

(2.11) $\quad R^\alpha_{\beta kl} = \sum (h^\alpha_{ik} h^\beta_{il} - h^\alpha_{il} h^\beta_{ik})$

で与えられる。h^α_{ijk} を

(2.12) $\quad \sum h^\alpha_{ijk}\omega^k = dh^\alpha_{ij} - \sum h^\alpha_{ik}\omega^k_j - \sum h^\alpha_{kj}\omega^k_i + \sum h^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta$

で定義すれば, Codazziの方程式は

(2.13) $\quad h^\alpha_{ijk} - h^\alpha_{ikj} = 0$

となる。h^α_{ijkl} を

(2.14) $\quad \sum h^\alpha_{ijkl}\omega^l = dh^\alpha_{ijk} - \sum h^\alpha_{ljk}\omega^l_i - \sum h^\alpha_{ilk}\omega^l_j - \sum h^\alpha_{ijl}\omega^l_k + \sum h^\beta_{ijk}\omega^\alpha_\beta$

で定義すれば、

(2.15) $\quad h^\alpha_{ijkl} - h^\alpha_{ijlk} = \sum h^\alpha_{im} R^m_{jkl} + \sum h^\alpha_{mj} R^m_{ikl} - \sum h^\beta_{ij} R^\alpha_{\beta kl}$

が成り立つ。Δh^α_{ij} を $\sum h^\alpha_{ijkk}$ とおくとき, 次のことを得る。

Lemma 2.1 ([2], [9])

$$\Delta h^\alpha_{ij} = \sum h^\alpha_{kkij} + \sum_k \left(\sum_m h^\alpha_{km} R^m_{ijk} + \sum_m h^\alpha_{mi} R^m_{kjk} - \sum_\beta h^\beta_{ki} R^\alpha_{\beta jk}\right).$$

3. Pseudo-umbilical submanifolds と isotropic submanifolds

もし $\mathcal{H}$ 方向の第2基本形式が計量に比例するとき, 即ち $\langle \mathcal{H}, \sigma(X, Y)\rangle = \|\mathcal{H}\|^2/n \langle X, Y\rangle$ のとき, M は pseudo-umbilical submanifold と呼ばれ, 又その挿入は pseudo-umbilical と呼ばれる。

λ を M 上の非負関数として任意の単位 vector X につ

いて $\|\sigma(X,X)\|=\lambda$ がなり立つとき，M は λ − isotropic submanifold といわれ，その挿入は λ-isotropic であるという。

4．積分不等式

M を S^{n+p} の n 次元 compact orientable Riemannian submanifold とする。S.T.Yau によって次のことが示されている。

Lemma 4.1 ([12])．任意の実数 a に対して

$$\sum h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij}=\sum h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kkij}+(a+1)\sum\left(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R^m{}_{ijk}+h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R^m{}_{kjk}\right)$$
$$+a\|\mathfrak{H}\|^2-na\|\sigma\|^2+aL_N-\frac{1-a}{2}K_N-\sum a\,h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}h^\beta_{mj}h^\beta_{kk},$$

ここで $\|\sigma\|^2=\sum h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ij}$, $L_N=\sum h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}h^\alpha_{kl}h^\beta_{kl}$, $K_N=\sum\left(\sum_k(h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk}-h^\alpha_{jk}h^\beta_{ik})\right)^2$

$|a|\leqq 1$ のとき，上の式の右辺の評価を与える。

Lemma 4.2([12])．M の断面曲率が c より大きいとする。

$$\sum\left(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R^m{}_{ijk}+h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R^m{}_{kjk}\right)\geqq nc\|\sigma\|^2-c\|\mathfrak{H}\|^2.$$

Lemma 4.3([6])．M が pseudo-umbilical なら

$$K_N\leqq n\left(L_N-\|\mathfrak{H}\|^4/n^2\right).$$

等号は，M が一定の断面曲率をもちその挿入が isotropic のときそのときのみ成立する。

今後 M は pseudo-umbilical とする。そのとき上の Lemmas より

$$\sum h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij}\geqq(a+1)(nc\|\sigma\|^2-c\|\mathfrak{H}\|^2)+a\|\mathfrak{H}\|^2-na\|\sigma\|^2+\left(a-\frac{1-a}{2}n\right)L_N$$
$$+\frac{1-a}{2n}\|\mathfrak{H}\|^4-\frac{a\|\mathfrak{H}\|^2\|\sigma\|^2}{n}+\sum h^\alpha_{ij}h^\alpha_{kkij}$$

となる。$a=\frac{n}{n+2}$とおけば

$$\sum h^{\alpha}_{ij}\Delta h^{\alpha}_{ij} \geqq \sum h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{kkij} + (n\|\sigma\|^2-\|\mathfrak{H}\|^2)(2(n+1)(c-n-\tfrac{1}{n}\|\mathfrak{H}\|^2)/(n+2).$$

を得る。しかるに $\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2=\sum h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{ijk}+\sum h^{\alpha}_{ij}\Delta h^{\alpha}_{ij}$ が成り立っているから，両辺を積分して上の不等式を用いれば

$$0\geqq\int_M\{\sum h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{ijk}+\sum h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{kkij}+(n\|\sigma\|^2-\|\mathfrak{H}\|^2)(2(n+1)(c-n-\tfrac{1}{n}\|\mathfrak{H}\|^2)/(n+2)\}*1_M$$

となる。しかるに次の一般的なLemmaがある。

Lemma 4.4.

$$\sum h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{ijk} \geqq \frac{3}{n+2}\sum h^{\alpha}_{kki}h^{\alpha}_{jji}.$$

等号は，$h^{\alpha}_{ijk}=\sum_{\ell}\frac{1}{n+2}\{h^{\alpha}_{\ell\ell i}\delta_{jk}+h^{\alpha}_{\ell\ell j}\delta_{ik}+h^{\alpha}_{\ell\ell k}\delta_{ij}\}$ のときそのときのみなり立つ。

証明．テンソル $h^{\alpha}_{ijk}-\sum_{\ell}\frac{1}{n+2}\{h^{\alpha}_{\ell\ell i}\delta_{jk}+h^{\alpha}_{\ell\ell j}\delta_{ik}+h^{\alpha}_{\ell\ell k}\delta_{ij}\}$ の長さを計算すればよい。　　終

このLemma 4.4とStokesの定理を用いれば $\|\nabla^{\perp}\mathfrak{H}\|^2=\sum h^{\alpha}_{jji}h^{\alpha}_{kki}$ とおいて，次を得る。

定理4.1。MがS^{n+p}のn次元compact orientable pseudo-umbilical submanifoldとすると

$$\int_M\{\|\nabla^{\perp}\mathfrak{H}\|^2-\frac{1}{n-1}(n\|\sigma\|^2-\|\mathfrak{H}\|^2)(2(n+1)(c-n-\tfrac{1}{n}\|\mathfrak{H}\|^2)\}*1_M\geqq 0$$

が成立する。

5. (☆)を満たすS^{n+p}の部分多様体

MをS^{n+p}のn次元pseudo-umbilical submanifoldとして一定の平均曲率をもつとする。xをその等長挿入とする。

$x, \mathcal{H}$ を R^{n+p+1} の元を値とする関数と見るとき，次のことがわかる。そこでは，$\nabla^\perp$ を normal connection についての共変微分として $\Delta^\perp$ をその Laplacian としている([9])． A^ξ は法線 vector ξ 方向の第2基本形式である。

(5.1) $\Delta x = -nx + \mathcal{H}$,

(5.2) $\Delta \mathcal{H} = \Delta^\perp \mathcal{H} - \|\mathcal{H}\|^2/n\, \mathcal{H} + \|\mathcal{H}\|^2 x$.

(5.2)を示そう。なぜならば $e_1, \cdots, e_n$ を M の a local field of orthonormal frames として，

$$\Delta\mathcal{H} = \sum e_i e_i \mathcal{H} - (\sum \nabla_{e_i} e_i)\mathcal{H}$$

$$= \sum e_i(\nabla^\perp_{e_i}\mathcal{H} - A^{\mathcal{H}} e_i) - \sum(\nabla^\perp_{\nabla_{e_i}e_i}\mathcal{H} - A^{\mathcal{H}}(\nabla_{e_i} e_i))$$

Mが pseudo-umbilicalなので

$$\Delta\mathcal{H} = \sum e_i(\nabla^\perp_{e_i}\mathcal{H} - \|\mathcal{H}\|^2/n\, e_i) - \sum(\nabla^\perp_{\nabla_{e_i}e_i}\mathcal{H}) + \frac{\|\mathcal{H}\|^2}{n}(\sum \nabla_{e_i} e_i)$$

$\|\mathcal{H}\|$ は定数なので

$$\Delta\mathcal{H} = \sum \nabla^\perp_{e_i}\nabla^\perp_{e_i}\mathcal{H} - \sum A^{(\nabla^\perp_{e_i}\mathcal{H})}e_i + \|\mathcal{H}\|^2 x - \frac{\|\mathcal{H}\|^2}{n}\mathcal{H} - \sum(\nabla^\perp_{\nabla_{e_i}e_i}\mathcal{H})$$

$$= \Delta^\perp\mathcal{H} - \sum A^{(\nabla^\perp_{e_i}\mathcal{H})}e_i + \|\mathcal{H}\|^2 x - \frac{\|\mathcal{H}\|^2}{n}\mathcal{H}$$

さてMは pseudo-umbilicalで平均曲率を一定としているから，Codazziの方程式を使えば

$$\sum A^{(\nabla^\perp_{e_i}\mathcal{H})}(e_i) = 0$$

となることがわかるので，結局(5.2)を得る。

今後Mは $\Delta^\perp\mathcal{H} = -\lambda\mathcal{H}$ ($\mathcal{H} \neq 0$)を満たしているものとする。任意の $a \in R^{n+p+1}$ に対してM上の関数 $g_1(a)$, $g_2(a)$ を

$g_1(a)=\langle f, a\rangle' + (\star-\star')\langle x, a\rangle'$, $g_2(a)=\langle f, a\rangle' + (\star-\star')\langle x, a\rangle'$

とおこう。ここで $\star=-(n-\lambda-\|f\|^2/n)/2$, $\star'=\sqrt{(n-\lambda-\|f\|^2/n)^2+4\|f\|^2}/2$.

(5.1), (5.2) を使えば

(5.3) $\quad \Delta g_1(a)=-\mu_1 g_1(a)$, $\Delta g_2(a)=-\mu_2 g_2(a)$

となることがわかる。ここで $\mu_1=\lambda+\|f\|^2/n+\star-\star'$, $\mu_2=\lambda+\|f\|^2/n+\star+\star'$。

$e_A=(0,\cdots,0,\overset{A\text{番目}}{1},0,\cdots,0)\in R^{n+p+1}$ とすれば，挿入 x は

$$x=(g_2(e_1)-g_1(e_1),\cdots\cdots,g_2(e_{n+p+1})-g_1(e_{n+p+1}))/\star'$$

で与えられる。適当に上の式を組み合せれば

$$\|f\|^2=-(n-\mu_1)(n-\mu_2),\quad \lambda=\mu_1\mu_2/n$$

を得る。特に断面曲率 c の球面 $S^n(c)$ の Δ の固有値は非負整数 s を使えば $s(n+s-1)c$ となるので次のことがわかる。

系5.1. $S^n(c)$ が S^{n+p} の ($\star$) を満たす部分多様体であるとき，ある整数 s_0, s_1 ($0\leqq s_0<s_1$) があって

$$\begin{cases} \mu_1=s_0(n+s_0-1)c, \quad \mu_2=s_1(n+s_1-1)c \\ \|f\|^2=-(n-s_0(n+s_0-1)c)(n-s_1(n+s_1-1)c) \\ \lambda=s_0s_1(n+s_0-1)(n+s_1-1)c^2/n \end{cases}$$

となる。特に $n/s_1(n+s_1-1)<c<n/s_0(n+s_0-1)$ がわかるのである。

6. 例.

$(M,\langle\,,\rangle)$ を n 次元 Riemannian manifold とする。x_0, x_1 をそれぞれ M から S^{n+p_0}, S^{n+p_1} への挿入としてその誘導計

量が $\alpha^2\langle\ ,\ \rangle$, $\beta^2\langle\ ,\ \rangle$ となっているとする。Mから $S^{2n+p_0+p_1+1}$ への挿入を

$$x_t = \{(\cos t)x_0,\ (\sin t)x_1\}$$

とおく。その誘導計量は $(\alpha^2\cos^2 t+\beta^2\sin^2 t)\langle\ ,\ \rangle$ となる。

Proposition 6.1.

1) $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1$ を x, x_0, x_1 のそれぞれの平均曲率vectorとする

$$\|\mathfrak{h}\|^2 = \frac{n^2(\alpha^2-\beta^2)^2\cos^2 t\sin^2 t}{(\alpha^2\cos^2 t+\beta^2\sin^2 t)} + \frac{(\alpha^4\|\mathfrak{h}_0\|^2\cos^2 t+\beta^4\|\mathfrak{h}_1\|^2\sin^2 t)}{(\alpha^2\cos^2 t+\beta^2\sin^2 t)^2}$$

がなりたつ。

2) x_0, x_1 が pseudo-umbilical なら x も pseudo-umbilical.

3) x_0, x_1 が isotropic なら x も isotropic。

4) x_0, x_1 が minimal ならば $\Delta^+\mathfrak{h} = -\lambda\mathfrak{h}$ が成りたつ。

$$\lambda = n(\beta^2\cos^2 t+\alpha^2\sin^2 t)/(\alpha^2\cos^2 t+\beta^2\sin^2 t) - n(\alpha^2-\beta^2)^2\cos^2 t\sin^2 t$$

しかも任意の単位vectorに対して $\|\nabla_X\mathfrak{h}\|^2$ は定数となっている。

さて $\psi_{n,s}: S^n(n/s(n+s-1)) \longrightarrow S^{m(s)}$ を標準極小挿入とする([3])。ここでsは正整数で $m(s)=(2s+n-1)(s+n-2)!/s!(n-1)!-1$ とする。この ψ_{n,s_0}, ψ_{n,s_1} を使って前のように $S^n(c)$ から $S^{m(s_0)+m(s_1)+1}$ への等長挿入 $\psi^{t,n}_{s_0,s_1}$ を構成する。そのときcは $n\cos^2 t/s_0(n+s_0-1) + n\sin^2 t/s_1(n+s_1-1)$ となる。したがって系5.1を満たす等長挿入が得られたことになる。(5.3)の下で述べたことにより次のことがわかる。

Proposition 6.2.

xを$S^n(c)$からS^{n+p}へのfull-isometric immersionで(☆)を満たしているものとする。そのとき$t\in R$, 整数s_0, s_1 $(0\leqq s_0<s_1)$と$R^{m(s_0)+m(s_1)+1}$の正の半定符号の対称変換Tがあって、

$$x \sim T\circ \psi^{t;n}_{s_0,s_1} \quad (\text{congruent})$$

一般にTは恒等変換にはならないが、$\psi^{t;n}_{s_0,s_1}$がisotropicになることとProposition 6.1の最後と([11], pp. 32)を用いて、$\psi^{t;n}_{1,2}$については、恒等変換となることがわかる。さらに次が成立する。

Proposition 6.3. xを$S^n(c)$ $(n/2(n+1)<c<1)$からS^{n+p}への等長挿入として、各x_iがdegree 1と2のspherical harmonicsで生成されているならば、$t\in R$があって

$$x \sim \psi^{t;n}_{1,2} \quad (\text{congruent})$$

となる。

7. 安定部分多様体.

Mをn(even)次元compact orientable submanifold in S^{n+p}とし、xをその挿入とする。xが安定部分多様体とは、xの任意の変分x_tについて

$$\frac{d}{dt}\int_M \|\mathcal{L}_t\|^n *1_t \Big|_{t=0} = 0$$

となることである。ここで$x=x_0$, $\mathcal{L}_t$, $*1_t$はそれぞれx_tによる平均曲率vectorと体積要素とする。さて最初にEuler-Lagrange方程式を導こう。

$$\frac{d}{dt}\int_M \|\mathcal{L}_t\|^n *1_t\Big|_{t=0} = \int_M n\|\mathcal{L}\|^{n-2}\langle \mathcal{L}, (\nabla'_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathcal{L}_t)_{t=0}\rangle *1_M$$
$$+ \int_M \|\mathcal{L}\|^n \left(\frac{d}{dt}*1_t\right)_{t=0}$$

であるから，$(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathcal{L}_t)_{t=0}$ の法線成分と $(\frac{d}{dt}*1_t)_{t=0}$ を求めればよい。

Lemma 7.1 ([4], [9])

(7.1) $\frac{d}{dt}*1_t\big|_{t=0} = -\langle \Upsilon^\perp, \mathcal{L}\rangle *1_M + d\,\theta_{\Upsilon^T}$

(7.2) $[\nabla'_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathcal{L}_t]^\perp = \Delta^\perp \Upsilon^\perp + \sum \langle \Upsilon^\perp, \sigma(e_i, e_j)\rangle \sigma(e_i, e_j) + n\Upsilon^\perp + \nabla^\perp_{\Upsilon^T}\mathcal{L}$

ここで $e_1, \cdots, e_n$ は M の a local field of orthonormal frames とし，Υ は変分 vector field で $\Upsilon^T, \Upsilon^\perp$ はそれぞれ Υ の接線成分，法線成分とする。θ_{Υ^T} は次のように定義される $(n-1)$-form on M：$*1(e_1, \cdots, e_n) = 1$ に対して

$$\theta_{\Upsilon^T}(X_1, \cdots, X_{n-1}) = \langle \Upsilon^T \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1}, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\rangle$$

定理 7.1. Euler-Lagrange 方程式は

$$\Delta^\perp(\|\mathcal{L}\|^{n-2}\mathcal{L}) + \sum \|\mathcal{L}\|^{n-2}\langle \mathcal{L}, \sigma(e_i, e_j)\rangle \sigma(e_i, e_j)$$
$$+ n\|\mathcal{L}\|^{n-2}\mathcal{L} - \frac{1}{n}\|\mathcal{L}\|^n \mathcal{L} = 0$$

となる。

系 7.1　M が pseudo-umbilical で平均曲率を一定とするとき，Euler-Lagrange 方程式は，$\Delta^\perp \mathcal{L} = -n\mathcal{L}$ となる。

さて定理 A を示そう。A. Lichinerowicz [8] によれば (5.3) から $\mu_1 \geqq n/(n-1)\,k$ を得る。$\lambda = n$ であるので

$$k\left(\|\mathcal{L}\|^2 + n^2 \frac{n^2 k}{(n-1)}\right) \leqq n^2(n-1-k)$$

となるから，定理Aが示される。

次に定理Bを示そう。 Stokesの定理より

$$\int \|\nabla^{\perp}\mathcal{L}\|^2 *1_M = -\int \langle \mathcal{L}, \Delta^{\perp}\mathcal{L}\rangle *1_M = n\int \|\mathcal{L}\|^2 *1_M$$

が成り立つ。したがって定理4.1の積分不等式は

$$\int_M \left\{ n\|\mathcal{L}\|^2 - \frac{1}{n-1}(n\|\sigma\|^2 - \|\mathcal{L}\|^2)\left(2(n+1)c - n - \frac{1}{n}\|\mathcal{L}\|^2\right)\right\} *1_M \geq 0$$

となる。定理Bの仮定は，被積分関数が非正となることであるから，

$$(7.3)\quad n\|\mathcal{L}\|^2 - \frac{1}{n-1}(n\|\sigma\|^2 - \|\mathcal{L}\|^2)\left(2(n+1)c - n - \frac{1}{n}\|\mathcal{L}\|^2\right) = 0$$

を得る。もちろん積分不等式を導いたときのLemmasの不等式の等号がなりたっている。特に $M = S^n(c)$ となる。Mが極小部分多様体ならば，Mは全測地曲面かそれともVeronese manifoldとなる[7]。Mは極小部分多様体でないとしてよい即ち $\mathcal{L} \neq 0$。 系5.1よりある整数 s_0, s_1 $(0 < s_0 < s_1)$ があって

$$\begin{cases} \|\mathcal{L}\|^2 = -(n - s_0(n+s_0-1)c)(n - s_1(n+s_1-1)c) \\ c = n \Big/ \sqrt{s_0 s_1 (n+s_0-1)(n+s_1-1)} \end{cases}$$

が成り立つから (7.3) とともに $s_0 = 1, s_1 = 2$ であることがわかる。

参照文献

[1] B.Y. Chen, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker New York, 1973.

[2] S.S. Chern, M. do Carmo and S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional Analysis and Related Fields, Springer, 1970, 60-75.

[3] M. do Carmo and N.R. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. of Math., 95 (1971), 43-62.

[4] A. Duschek, Zur geometrischen Variationsrechneng Math. Z., 40 (1936), 279-291.

[5] N. Ejiri, Compact minimal submanifolds of a sphere with positive Ricci curvature, J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), 251-256.

[6] T. Itoh, On Veronese manifold, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 497-506.

[7] ———, Addendum to my paper "On Veronese manifold" J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 333-340.

[8] A. Lichinerowicz, Géométrie des groupes de transformations, Paris, 1958.

[9] J. Simons, Minimal varieties in riemannian

manifolds, Ann. of Math., 88 (1968), 62-105.

[10] B. Smyth, Submanifolds of constant mean curvature, Math. Ann., 205 (1975), 265-280.

[11] N. R. Wallach, Minimal immersions of symmetric spaces into spheres, Symmetric spaces, Ed. Boothby and Weiss, Marcel Dekker New York, 1972, 1-40.

[12] S. T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, Amer. J. Math., 97 (1975), 76-100.